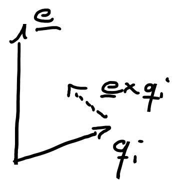
10. Darstellungstheorie

Motivation: Die Erhaltung des Drehimpulses folgt mit dem Noetherschen Theorem aus der Rotationssymmetrie des Systems. Wir betrachten die Symmetrie

$$\underline{q}_i \mapsto R(\alpha \underline{e})\, \underline{q}_i \qquad \forall i$$

wobei $R(\alpha \underline{e})$ eine Rotation um die Achse $\underline{e}$ mit Winkel α ist. Das zugehörige Vektorfeld lautet

$$v = \begin{pmatrix} \underline{e} \times \underline{q}_1 \\ \vdots \\ \underline{e} \times \underline{q}_n \end{pmatrix}$$



Somit

$$F = \sum_{i=1}^{n} \underline{p}_i \cdot (\underline{e} \times \underline{q}_i) \overset{\text{Spatprodukt zyklisch}}{=} \underline{e} \cdot \sum_{i=1}^{n} \underline{q}_i \times \underline{p}_i = \underline{e} \cdot \underline{L}$$

Um den Drehimpuls zu beschreiben, möchten wir also die Wirkung infinitesimaler Drehungen genauer verstehen.

10.1 Einführung

Definition: Eine Gruppe ist eine Menge mit einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$ mit den Eigenschaften für alle $a, b, c \in G$:

(i) $(a \cdot b) \cdot c = a (b \cdot c)$ (assoziativ)

(ii) $\exists e \in G: \; a \cdot e = e \cdot a = a$ (neutrales Element)

(iii) $\exists a^{-1} \in G: \; a^{-1} a = a a^{-1} = e$ (inverses Element)

Falls $ab = ba$ für alle $a, b \in G$, nennt man die Gruppe abelsch/kommutativ.

Definition: Eine Darstellung ρ einer Gruppe G auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\rho : G \to Gl(V)$$

mit der Eigenschaft

$$\rho(a)\rho(b) = \rho(ab).$$

Daraus folgt, dass

$$\rho(e) = \rho(e \cdot e) = \rho(e)^2 \quad \Rightarrow \quad \rho(e) = \mathbb{1}_V$$

$$\mathbb{1}_V = \rho(e) = \rho(a^{-1}a) = \rho(a^{-1})\rho(a) \Rightarrow \rho(a^{-1}) = \rho(a)^{-1}.$$

Man nennt den Vektorraum V in dem Fall auch den Darstellungsraum der Darstellung ρ.

Beispiele: (i) triviale Darstellung: $\rho(G) = \mathbb{1}_V \quad \forall g \in G$

(ii) $G = S_n$, $V = \mathbb{C}^n$ mit Basis $e_1, \dots, e_n$

$$\rho(g)e_i = e_{g(i)}$$

(iii) $G = O(3)$, $V = C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $(\rho(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$

Inverses Element, damit

$$(\rho(gh)f)(x) = f((gh)^{-1}x) = f(h^{-1}g^{-1}x)$$

$$= (\rho(h)f)(g^{-1}x) = (\rho(g)\rho(h)f)(x)$$

Eine Darstellung ρ heißt irreduzibel (ansonsten reduzibel) falls es keine invarianten Unterräume außer $\{0\}$ und V gibt, d.h.

$\nexists V_1 \subset V : V_1 \neq \{0\}$ mit $\rho(a)V_1 \subseteq V_1 \quad \forall a \in G$.

10.2 Lie-Algebren

Man kann zeigen, dass die Reihe

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

absolut konvergiert für alle $X \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Es gilt

(i) $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X+Y)$ falls $XY = YX$

(ii) $\exp(X)^{-1} = \exp(-X)$

(iii) $A\exp(X)A^{-1} = \exp(AXA^{-1})$

$\exp(X^*) = \exp(X)^*$

$\exp(X^T) = \exp(X)^T$

(iv) $\det(\exp(X)) = \exp(\mathrm{tr}(X))$

Definition: Eine abgeschlossene Untergruppe $G \subseteq Gl(n,\mathbb{K})$ (alle konvergenten Folgen in $Gl(n,\mathbb{K})$ mit Elementen in G konvergieren in G) heißt (Matrix-) Lie Gruppe.

Definition: Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe G ist definiert als

$$\mathrm{Lie}(G) = \{ X \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \exp(tX) \in G \ \forall t \in \mathbb{R} \}.$$

Wir schreiben oft $\mathrm{Lie}(G) \equiv \mathfrak{g}$.

Eine äquivalente Definition der Lie Algebra einer Lie-Gruppe G betrachtet $\mathfrak{g}$ als den Tangentialraum der Identität in G:

$$X = \frac{d}{dt} \exp(tX)\Big|_{t=0} ,$$

wobei $t \mapsto \exp(tX)$ ein Pfad in G ist mit

$\exp(0 \cdot X) = \mathbb{1}$.

Beispiele: (i) $\mathfrak{u}(n) = \mathrm{Lie}(U(n))$

$$U(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A^+ A = \mathbb{1}\}$$

Sei $X \in \mathfrak{u}(n)$.

$$\exp(tX^+)\exp(tX) = \mathbb{1} \quad \Big| \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}$$

$$X^+ + X = 0$$

$\Rightarrow$ antihermiteschen Matrizen sind in $\mathfrak{u}(n)$.

Sei X antihermitesch,

$$\exp(tX)^+ \exp(tX) = \exp(-tX)\exp(tX) = \mathbb{1}.$$

Also sind alle Elemente in $\mathfrak{u}(n)$ antihermitesch.

(ii) $\mathfrak{su}(n) = \mathrm{Lie}(SU(n))$.

Zusätzlich muss für X gelten

$$1 = \det(\exp(tX)) = \exp(\mathrm{tr}(tX)) = \exp(t\,\mathrm{tr}(X))$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}(X) = 0$$

(iii) $\mathfrak{o}(n) = \mathrm{Lie}(O(n))$

$$\exp(tX)^T \exp(tX) = \mathbb{1} \quad \Big| \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}$$

$$X^T + X = 0$$

$\Rightarrow X$ antisymmetrisch

(iv) $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$, da $tr = 0$ automatisch durch Antisymmetrie erfüllt ist.

Eine allgemein definierte Lie Algebra ist ein Vektorraum $\mathfrak{g}$ zusammen mit einer Abbildung – der Lie Klammer – $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, s.d. $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(i) $[X,Y] = -[Y,X]$ (antisymmetrisch)

(ii) $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda [X,Z] + \mu [Y,Z]$ ((Bi-)Linearität)

(iii) $[[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] + [[Y,Z],X] = 0$ (Jacobi-Identität)

Somit sind die obigen Beispiele tatsächlich Lie-Algebren mit $[X,Y] = XY - YX$.

Es bleibt zu zeigen, dass $Lie(G)$ tatsächlich ein Vektorraum ist mit $[X,Y] \in Lie(G)$.

10.3 Campbell-Baker-Hausdorff Formel

Die Abbildung $\exp: M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to Gl_n(\mathbb{K})$ ist invertierbar in einer Umgebung von 0. Mit (Siehe Hall: „Lie Groups, Lie Algebras, and Representations")

$$\log(X) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(X-\mathbb{1})^n}{n}$$

folgt $\exp(\log(X)) = X$ falls $\|X - 1\| < 1$.

(vorerst) nicht behandelt

Satz (CBH) Sei $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Für kleines t gilt

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp\left(tX + tY + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)\right)$$

Beweis: Für kleines t folgt $\|\exp(tX)\exp(tY) - \mathbb{1}\| < 1$. Also existiert ein $Z(t)$ mit $\exp(tX)\exp(tY) = \exp(Z(t))$ und $Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n t^n$. Die linke Seite beginnt mit

$$\left(\mathbb{1} + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + \dots\right)\left(\mathbb{1} + tY + \frac{t^2}{2}Y^2 + \dots\right)$$
$$= \mathbb{1} + t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + Y^2 + 2XY) + \dots$$

und die rechte Seite mit

$$\mathbb{1} + Z(t) + \frac{1}{2}Z(t)^2 + \dots = \mathbb{1} + Z_1 t + Z_2 t^2 + \dots$$
$$+ \frac{1}{2}t^2 Z_1^2 + \dots$$
$$= \mathbb{1} + Z_1 t + t^2\left(\frac{Z_1^2}{2} + Z_2\right)$$

Es folgt,

$$Z_1 = X + Y$$
$$Z_2 = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + 2XY) - \frac{1}{2}(X+Y)^2$$
$$= \frac{1}{2}(XY - YX) = \frac{1}{2}[X,Y]$$

∎

Wir können nun zeigen, dass $\mathrm{Lie}(G)$ ein (reeller) Vektorraum ist. Seien $X, Y \in \mathfrak{g}$.

(i) Skalarmultiplikation: $\exp(tX) \in G \ \forall t$
$\Rightarrow \exp(t\lambda X) \in G \Rightarrow \lambda X \in \mathfrak{g}$

(ii) Für $n \to \infty$ gilt

$$\exp\left(\frac{1}{n} tX\right)\exp\left(\frac{1}{n} tY\right) = \exp\left(\frac{t}{n}(X+Y) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Definiere

$$A_n := \left[\exp\left(\frac{1}{n} tX\right)\exp\left(\frac{1}{n} tY\right)\right]^n$$

$$= \exp\left(t(X+Y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(t(X+Y))$$

Die Folge $(A_n)_n$ liegt in G, konvergiert in $GL_n(\mathbb{K})$ und da G abgeschlossen ist konvergiert sie auch in G.

Außerdem können wir nun $[X,Y] \in \mathfrak{g}$ beweisen. Wir zeigen zuerst $\exp([X,Y]) \in G$ (also für $t=1$).

Definiere

$$\tilde{B}_n := \exp\left(\frac{1}{n}X\right)\exp\left(\frac{1}{n}Y\right)\exp\left(-\frac{1}{n}X\right)\exp\left(-\frac{1}{n}Y\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n}(X+Y) + \frac{1}{2n^2}[X,Y] + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{n}(X+Y) + \frac{1}{2n^2}[X,Y] + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n}(X+Y) - \frac{1}{n}(X+Y)}_{\text{(erste Ordnung }=0)} + \underbrace{\frac{1}{n^2}[X,Y]}_{=\text{Kommutator}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

2. Ordnung

und

$$B_n := (\tilde{B}_n)^{n^2} = \exp\left([X,Y] + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n\to\infty} \exp([X,Y])$$

Da G immernoch abgeschlossen ist, folgt $\lim_{n\to\infty} B_n \in G$.

Durch Ersetzen von X durch tX, $t \in \mathbb{R}$ folgt die Aussage.

10.4 Darstellungen von Lie-Algebren

Während die Darstellung einer Gruppe kompatibel mit der Gruppenverknüpfung sein muss, fordert man für jene der Lie-Algebra die Kompatibilität mit der Lie-Klammer.

Eine Darstellung einer Lie-Algebra ist also eine lineare Abbildung

$$\rho: \mathfrak{g} \to End(V)$$

mit

$$\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)].$$

Beachte die Zielmenge $End(V) = Lie(Gl_n(V))$, da

$$\det(e^{tX}) = \exp(tr(tX)) \neq 0$$

für alle $X \in End(V)$ und $t \in \mathbb{R}$. Betrachte eine Darstellung σ einer Lie Gruppe G und definiere für $X \in Lie(G)$

$$\sigma_*(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sigma(\exp(tX)) \in Lie(Gl_n(\mathbb{K})) = End(V)$$

Man kann zeigen, dass σ_* eine Lie-Algebra Darstellung ist, welche rückwirkend σ (eingeschränkt auf die Einskomponente von G) definiert.

10.5 Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$

Wie wir oben festgestellt haben, besteht $\mathfrak{so}(3)$ aus den reellen antisymmetrischen 3×3 Matrizen. Eine Basis ist demnach

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beachte, dass z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} = e_x \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die drei Matrizen generieren also die Rotationen um die drei Achsen.

Da wir in der Physik jedoch gerne mit hermiteschen Matrizen/Operatoren arbeiten, multiplizieren wir jedes dieser Elemente mit i:

$$J_x := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z := \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Lie-Algebra jedoch weiterhin reell bleiben soll, gilt für jedes Element die Entwicklung $J = \sum_k i\alpha^k J_k$ für $\alpha^k \in \mathbb{R}$.

Schreiben wir 1 2 3 für $x\,y\,z$, so folgt

$$[J_i, J_j] = i\,\varepsilon_{ijk} J_k.$$

Wir definieren die Operatoren

$$J_\pm := J_x \pm i J_y \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$$

und rechnen

$$[J_z, J_\pm] = [J_z, J_x] \pm i [J_z, J_y]$$

$$= i J_y \pm J_x = \pm J_\pm$$

$$[J_+, J_-] = -i [J_x, J_y] + i [J_y, J_x]$$

$$= 2 J_z$$