2.3. Hilbertraum

Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt der bezüglich der induzierten Norm

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

vollständig ist.

Ein VR ist vollständig bezüglich $\|\cdot\|$, falls jede Cauchy-Folge ($\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, wobei $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall m,n>N: \|f_m - f_n\|<\varepsilon$) konvergiert

$$\lim_{m\to\infty} f_m = f \in \mathcal{H}$$

Ein $\underbrace{\text{Hilbertraum}}_{\infty\text{-dimensionaler}}$ heißt <u>separabel</u>, falls es eine abzählbare Basis $\{f_m\}_m$ gibt, also, dass jedes Element f geschrieben werden kann als

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i$$

In diesem Fall kann die Basis orthonormalisiert werden

$$h_1 := f_1 / \|f_1\|$$

$$g_2 := f_2 - \langle f_2, h_1\rangle h_1$$

$$h_2 := f_2 / \|f_2\|$$

$$\vdots$$

Notation

Elemente eines Hilbertraums werden üblicherweise als „kets" dargestellt

$$|f\rangle \in \mathcal{H},$$

Elemente des Dualraumes analog als „bras"

$$\langle \alpha| \in \mathcal{H}^*,$$

wobei
$$\langle \alpha| \left(|f\rangle\right) \equiv \langle \alpha | f \rangle := \langle \alpha, f \rangle$$

L^2

Der Raum $L^2(\mathbb{R})$ ist gegeben durch die Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, für die gilt

$$\|f\|^2 = \langle f|f\rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx < \infty .$$

Wir wollen zeigen, dass dies einen Hilbertraum definiert. Dafür zeigen wir zuerst, dass $L^2(\mathbb{R})$ ein Vektorraum ist

Selbstverständlich ist $\alpha f \in L^2(\mathbb{R})$, falls $f \in L^2(\mathbb{R})$ für $\alpha \in \mathbb{C}$.

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSUng)

$$|\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle \langle g|g\rangle$$

folgt weiter die Dreiecksungleichung für die induzierte Norm

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Daher folgt, dass falls $f, g \in L^2$, $f+g \in L^2$.

Zuletzt müssen wir zeigen, dass

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt auf $L^2(\mathbb{R})$ definiert.

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$
(2) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
(4) Linear im zweiten Argument:
$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$

(1)&(2) $$\langle f, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|f(x)|^2}_{\geq 0} dx \geq 0$$
$$= 0 \iff f = 0$$

(Wir identifizieren Funktionen, die sich auf einer Menge vom Mass Null unterscheiden.)

(3) $$\langle g | f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)}\, f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$
$$= \overline{\langle f | g \rangle}$$

(4) $$\langle f | \lambda g_1 + g_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, (\lambda g_1(x) + g_2(x))\, dx$$
$$= \lambda \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, g_1(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, g_2(x)\, dx$$
$$= \lambda \langle f | g_1 \rangle + \langle f | g_2 \rangle$$

Außerdem ist das Skalarprodukt wohldefiniert, denn falls $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle f | g \rangle \overset{C.S.}{\leq} \|f\| \, \|g\| < \infty.$$

Ohne Beweis: $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist bezüglich $\|\cdot\|$ vollständig und zusätzlich separabel.

Operatoren auf ∞-dimensionalen Hilberträumen

In der Quantenmechanik betrachten wir lineare Operatoren, z.B.

$$\hat{p} : f \mapsto \hat{p} f = -i \partial_x f ,$$

mit

$$\langle f | \hat{p} g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, \hat{p}\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, (-i) \partial_x\, g(x)\, dx$$

$$\overset{P.I.}{=} \int \overline{(-i \partial_x f)}\, g \, dx = \langle \hat{p} f | g \rangle$$

Allgemein definieren wir zu einem Operator $\hat{A}$ den adjungierten Operator $\hat{A}^\dagger$ als

$$\langle \hat{A} f | g \rangle = \langle f | \hat{A}^\dagger g \rangle .$$

Operatoren, für die gilt $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ (wie $\hat{p}$) heißen <u>selbstadjungiert</u>.

Im endlich-dimensionalen Fall, können wir A als Matrix darstellen und falls $\langle \cdot | \cdot \rangle = \langle \cdot , \cdot \rangle_0$ gilt

$$\mathrm{Mat}(\hat{A})^H = \mathrm{Mat}(\hat{A}) ,$$

also ist $\mathrm{Mat}(\hat{A})$ hermitesch.

Wir definieren das Spektrum $\sigma(\hat{A})$ eines Operators $\hat{A}$ als alle Elemente $\lambda \in \mathbb{C}$, für die es für jedes $\varepsilon > 0$ einen normierten Zustand $\psi_\varepsilon \in \mathcal{H}$ (mit $\langle \psi_\varepsilon | \psi_\varepsilon \rangle = 1$) gibt mit

$$\| (\hat{A} - \lambda) \psi_\varepsilon \| < \varepsilon .$$

Falls λ ein EW ist, also falls $\hat{A} \psi = \lambda \psi$ für ein ψ, so ist $\lambda \in \sigma(\hat{A})$.

$\Rightarrow$ Verallgemeinerung der EW.

Man kann zeigen, dass $\sigma(\hat{A}) \subset \mathbb{R}$ für $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$

Vorsicht: nicht jeder Eigenvektor eines Operators muss normierbar sein, also vor allem nicht in L^2. So z.B. die Eigenvektoren e^{ikx} zum Operator $\hat{p} = -i\partial_x$.

Wir wollen jedoch zeigen, dass jeder Zustand im Hilbertraum dargestellt werden kann als eine kontinuierliche Linearkombination dieser Funktionen.

2.4. Fourier-Theorie auf $L^2(\mathbb{R}^n)$

Zur Wiederholung: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{f}(\underline{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) e^{-i \underline{k} \cdot \underline{x}} \, dx^n .$$

Es gilt

- $L^1(\mathbb{R}^n) \not\subset L^2(\mathbb{R}^n)$

  $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{[0,1]}$

  $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2 \quad \Rightarrow g \in L^1$

  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = -\log(0) \notin \mathbb{R} \quad \Rightarrow g \notin L^2$

- $L^2(\mathbb{R}^n) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n)$

  $h : x \mapsto \frac{1}{x} \chi_{[1,\infty)}$

  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \log(\infty) \notin \mathbb{R} \quad \Rightarrow h \notin L^1$

  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^\infty = 1$

Lemma: Die Faltung zweier L^1-Funktionen $h := g * f$ liegt in L^1 und $\hat{h} = \hat{g}\,\hat{f}$.

Beweis: Sei $h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y)\, dy = (g*f)(x)$

$$\|h\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y)\, dy \right| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\,|f(y)|\, dx\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \|g\|_1\, |f(y)|\, dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty$$

$$\Rightarrow h_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\hat{h}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y)\, dy\, \underbrace{e^{-ikx}}_{\substack{= e^{-ikx} e^{iky} e^{-iky} \\ = e^{-ik(x-y)} e^{-iky}}} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) e^{-ik(x-y)}\, dx\, f(y) e^{-iky}\, dy$$

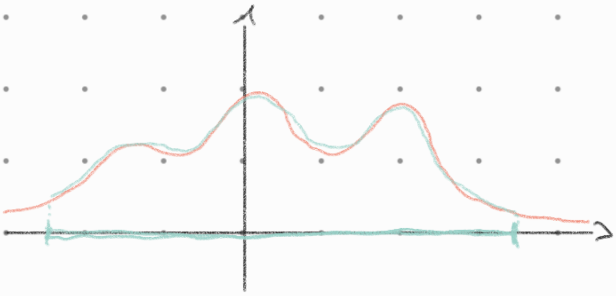
$$= \hat{g}(k)\, \hat{h}(k)$$

$\square$

Lemma: $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der L^2-Norm und für $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ gilt $\|f\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2} \|\hat{f}\|_{L^2}$.

Sei X eine Menge. Dann ist $M \subseteq X$ dicht in X, falls es für jedes $x \in X$ eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in M$ gilt, s.d. $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

Beweisidee: Sei $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ die Menge der Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Dann ist $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$.



Aber, $C_c^0(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Daher ist insbesondere $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sei $g(x) = \overline{f(-x)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann

$$\hat{g}(h) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)} e^{-ihx} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(-x) e^{ihx} dx}$$

$$= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ihx} dx} = \overline{\hat{f}(h)}.$$

Für $h = g * f$ folgt somit $\hat{h}(h) = |\hat{f}(h)|^2 \geq 0$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)|^2 \, dk = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(k) \, dk = (2\pi)^{\frac{n}{2}} h(0)$$

$$= (2\pi)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(-y) f(y) \, dy = (2\pi)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^2 \, dy \qquad (\mathrm{II})$$

Es folgt, dass die Fourier-Transformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Satz: Es existiert eine Fortsetzung $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ der Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Sei $f \in L^2$. Es gibt eine Cauchy-Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit Elementen in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\|f_k - f\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$.
Es folgt, dass $(\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ebenfalls eine Cauchy-Folge bildet mit Elementen in L^2. Da L^2 vollständig ist, folgt

$$\hat{f} := \lim_{k \to \infty} \hat{f}_k \in L^2 .$$