II. Tensorprodukt

Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$.

<u>Definition</u> Das Tensorprodukt $V \otimes W$ besteht aus Elementen der Form $v_1 \otimes w_1 + \dots + v_\ell \otimes w_\ell$ für $v_i \in V$, $w_i \in W$ mit den Rechenregeln ($\lambda_i \in \mathbb{K}$)

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \otimes w = \lambda_1 (v_1 \otimes w) + \lambda_2 (v_2 \otimes w)$$

$$v \otimes (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 (v \otimes w_1) + \lambda_2 (v \otimes w_2).$$

Beachte!

$$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 \neq (v_1 + v_2) \otimes (w_1 + w_2)$$

Seien $\{e_1, \dots, e_n\}$ & $\{k_1, \dots, k_m\}$ Basen von V und W.
Wir schreiben

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad , \alpha_i \in \mathbb{K}$$

$$w = \sum_{j=1}^{m} \beta_j k_j \quad , \beta_j \in \mathbb{K}.$$

Dann folgt

$$v \otimes w = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \otimes w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, (e_i \otimes w)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(e_i \otimes \sum_{j=1}^{m} \beta_j k_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (e_i \otimes k_j)$$

Somit ist $(e_i \otimes k_j)_{i,k}$ zumindest ein Erzeugendensystem für $V \otimes W$. Bevor wir zeigen können, dass $\{e_i \otimes k_j\}$ eine Basis ist beweisen wir

Lemma (Universelle Eigenschaft)

Für jede bilineare Abbildung $f: V\times W \to Z$ existiert eine eindeutige lineare Funktion $\bar{f}: V\otimes W \to Z$ mit $f(v,w) = \bar{f}(v\otimes w)$.

Diagramm dafür:

$$\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & V\otimes W \arrow[d, "\bar{f}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt aus den Rechenregeln von $V\otimes W$ und der Festlegung von $\bar{f}(e_i\otimes h_j) := f(e_i, h_j)$. Daraus folgt ebenfalls die Existenz.

Betrachte die Funktion $\tilde{\varphi}: V \to \mathbb{K}$ linear, definiert durch $\tilde{\varphi}(e_i) = \delta_{ih}$ für irgendein $h = 1,..,m$. Die Abbildung $\varphi: V\times W \to W$, $(v,w) \mapsto \tilde{\varphi}(v)\cdot w$ ist bilinear und nach der universellen Eigenschaft gibt es ein $\Phi: V\otimes W \to W$ linear mit $\varphi(v,w) = \Phi(v\otimes w)$.

Wir nehmen an, dass $\{e_i\otimes h_j\}$ <u>keine</u> Basis bzw. nicht linear unabhängig ist, d.h.

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij}\, e_i\otimes h_j = 0 \quad \text{für geeignete } \lambda_{ij}\in\mathbb{K}$$

$$0 = \Phi(0) = \Phi\left(\sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij}\, e_i \otimes h_j\right) = \sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij}\, \Phi(e_i \otimes h_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij}\, \tilde{\varphi}(e_i) h_j = \sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij}\, \delta_{ih}\, k_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{hj}\, k_j$$

Da wir $\{h_j\}$ als Basis für W annehmen, ist dies ein Widerspruch.

$\square$

Die Dimension von $V \otimes W$ ist daher

$$\dim(W \otimes V) = \dim(V) \dim(W).$$

Elemente v von $V \otimes W$ werden auch Tensoren genannt, wobei deren Komponenten gegeben sind durch den Koeffizient v^{ij} in

$$v = \sum_{i,j=1}^{m,n} v^{ij}\, e_i \otimes h_j.$$

Selbstverständlich hängt v^{ij} von den Basen $\{e_i\}$ & $\{h_j\}$ ab.

<u>Satz</u> Seien $A: V \to V'$ & $B: W \to W'$ linear, dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $A \otimes B: V \otimes W \to V' \otimes W'$. Außerdem folgt für passende C, D

$$(C \otimes D)(A \otimes B) = CA \otimes DB.$$

Beweis: Die Funktion $f: V\times W \to V\otimes W$, $f(v,w) = Av \otimes Bw$ ist bilinear. Es existiert also eine lineare Abbildung $\bar{f} \equiv A\otimes B$, $(A\otimes B)(v\otimes w) = Av\otimes Bw$. Der Rest folgt.

Beispiel: Sei $V,W = \mathbb{R}^2$ mit Basen $\{e_i\}_{i=1,2}$ & $\{h_j\}_{j=1,2}$. Wir definieren $g_{ij} = e_i \otimes h_j$. Ein allgemeines Element beschreiben wir als

$$v = \lambda_1 g_{11} + \lambda_2 g_{12} + \lambda_3 g_{21} + \lambda_4 g_{22} \equiv \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1\otimes 1 \\ 1\otimes 2 \\ 2\otimes 1 \\ 2\otimes 2 \end{array} \end{array}$$

Sei $A: V \to V$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Betrachte

$$\tilde{A} g_{ij} := (A e_i)\otimes h_j = (a_{1i} e_1 + a_{2i} e_2)\otimes h_j$$

$$= a_{1i} g_{1j} + a_{2i} g_{2j}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{11} \to a_{11} g_{11} + a_{21} g_{21} \\ g_{12} \to a_{11} g_{12} + a_{21} g_{22} \\ g_{21} \to a_{12} g_{11} + a_{22} g_{21} \\ g_{22} \to a_{12} g_{12} + a_{22} g_{22} \end{array}\right\} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{21} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Analog,

$$\tilde{B} g_{ij} := e_i \otimes (B h_j) = e_i \otimes (b_{1j} k_1 + b_{2j} h_2)$$
$$= b_{1j}\, g_{i1} + b_{2j}\, g_{i2}$$

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &\to b_{11} g_{11} + b_{21} g_{12} \\ g_{12} &\to b_{12} g_{11} + b_{22} g_{12} \\ g_{21} &\to b_{11} g_{21} + b_{21} g_{22} \\ g_{22} &\to b_{12} g_{21} + b_{22} g_{22} \end{aligned}\right\} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Definieren wir das Kronecker-Produkt zweier Matrizen A, B als

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11} B & a_{12} B \\ a_{21} B & a_{22} B \end{pmatrix},$$

so folgt

$$\tilde{A} = A \otimes \mathbb{1} \qquad \tilde{B} = \mathbb{1} \otimes B.$$

Da allgemein die Abbildung $\tilde{f}: V \times W \to V \otimes W,\ (v,w) \mapsto Av \otimes Bw$ bilinear ist, folgt, dass es eine eindeutige lineare Abbildung gibt $f: V \otimes W \to V \otimes W$, $f(v \otimes w) = Av \otimes Bw$. Wir schreiben dies als $(A \otimes B)(v \otimes w)$. In einer geeigneten Basis (siehe Bsp.) ist diese Definition gleich der des Kronecker-Produkts (wie die Notation schon andeutet.

Seien $A(t)$, $B(t)$ Matrizen mit $t \in \mathbb{R}$ & $B(0) = A(0) = \mathbb{1}$

$$\frac{d}{dt}\left(A(t) \otimes B(t)\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_{11}(t)B(t) & \cdots & a_{1n_2}(t)B(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n_11}(t)B(t) & & a_{n_1n_2}(t)B(t) \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot a_{11}(0)\mathbb{1} & \cdots & \dot a_{1n_2}(0)\mathbb{1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dot a_{n_11}(0)\mathbb{1} & \cdots & \dot a_{n_1n_2}(0)\mathbb{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot B(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \dot B(0) \end{pmatrix}$$

$$= \dot A(0) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \dot B(0)$$