8. Statistik

8.1 Mathematische Beschreibung

Definition: Die Grundmenge Ω eines Zufallsexperiments ist die Menge aller möglichen Ergebnisse.

Definition: Ein Ereignis ist eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$. Man sagt, A „tritt ein" bzw. „tritt nicht ein", falls das Ergebnis $\omega \in A$ bzw. $\omega \notin A$.

Empirisches Gesetz: Die relative Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses strebt mit der Wiederholung der Durchführung gegen einen konstanten Wert zwischen 0 und 1.

Es bezeichne $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge der Menge Ω, also die Menge aller Teilmengen. z.B. $\Omega = \{a, b\} \Rightarrow \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

Definition: Sei Ω eine nichtleere Menge. Wir nennen

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$

ein W'heitsmaß, falls gilt

(i) $P(\Omega) = 1$.

(ii) Für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ gilt

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Daraus folgt außerdem, dass $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) = 2P(\emptyset)$, also $P(\emptyset) = 0$.

Zusätzlich $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$ also $P(A^c) = 1 - P(A)$

Falls Ω überabzählbar ist, muss $\mathcal{P}(\Omega)$ mit einer sog. σ-Algebra $\mathcal{A}$ ersetzt werden.

Definition: Sei Ω nichtleer. Eine Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω ist eine σ-Algebra, falls

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

(iv) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_i A_i, \bigcap_i A_i \in \mathcal{A}$.

Das Triple $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt dann W'keitsraum.

Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W'keitsraum und $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum ($\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra auf Ω'). Eine (messbare) Funktion $X : \Omega \to \Omega'$ heißt dann eine Ω'-Zufallsvariable auf Ω.

$X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ $\forall A' \in \mathcal{A}'$

Beispiel: Doppelter Würfelwurf: $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), \ldots, (6,6)\}$
$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$X_1 : \Omega \to \Omega'$, $(u_1, u_2) \mapsto u_1$

$X_2 : \Omega \to \Omega'$, $(u_1, u_2) \mapsto u_2$

$S : \Omega \to \Omega'$, $(u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$

8.2. Kenngrößen

Sei X eine reelle diskrete Zufallsvariable mit Ergebnissen $(x_i)_{i\in\Omega} \in \Omega'$ mit $p_i = P(\underbrace{x_i}_{\in\Omega'}) := P(i)$.

Der Erwartungswert ist gegeben durch:

$$E[X] := \sum_{i\in\Omega}{}' \; x_i \, p_i$$

Varianz:

$$Var[X] := \sum_{i\in\Omega}{}' \; (x_i - E[X])^2 \, p_i \, .$$

Wir bezeichnen eine W'keitsverteilung als kontinuierlich, falls das Bild der Zufallsvariablen $Im(X)$ überabzählbar ist, was ebenfalls bedeutet, dass die Grundmenge Ω es ist.

Es kann eine W'keitsdichtefunktion $f_X(x) \equiv f(x)$ eingeführt werden, sodass

$$P([a,b]) = \int_a^b f(x)\, dx \, .$$

Aus der Definition des W'keitsmaßes folgt

(i) $f(x) \geq 0$

(ii) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$

Der Erwartungswert ist dann definiert durch

$$E[X] := \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\, dx$$

und die Varianz als

$$\mathrm{Var}[X] := \int_{\mathbb{R}} (x - E[X])^2 f(x)\, dx$$

Beispiel: Normalverteilung oder Gauß-Verteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Natürlich ist $f(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$. Außerdem integriert sie zu 1, denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx}_{} = 1$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2} dx\, dy\right)^{1/2} = \left(2\pi \int_0^{\infty} r\, dr\, e^{-r^2}\right)^{1/2}$$

$$= \left(2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^{\infty}\right)^{1/2} = \sqrt{\pi}$$

Der Erwartungswert ist gegeben durch

$$\int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\mathbb{R}} x\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\mathbb{R}} (x+\mu)\, e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx$$

$$+\mu\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \mu$$

und die Varianz

$$\int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\mathbb{R}} x\cdot x e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\underbrace{\left[x(-\sigma^2)\, e^{-x^2/2\sigma^2}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}\,\sigma\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sigma^2$$

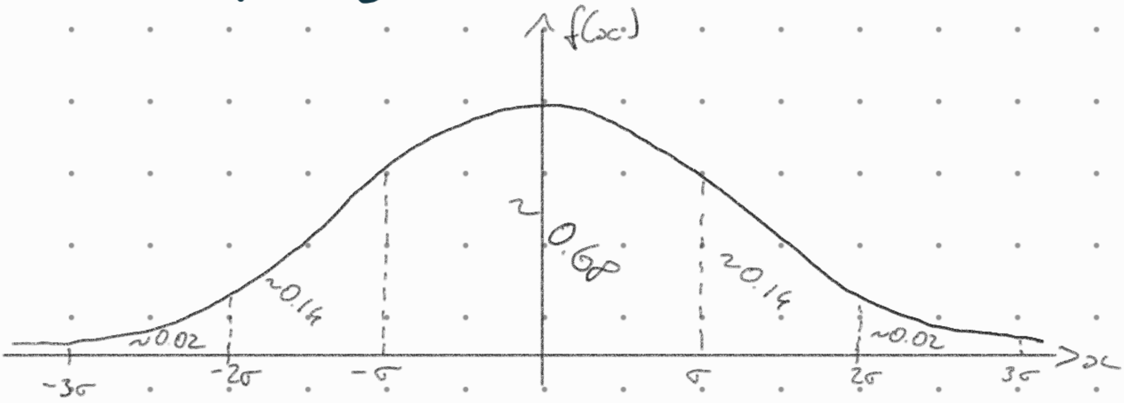
$x' = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}$

$dx' = \frac{dx}{\sqrt{2}\sigma}$

Allgemein definieren wir die Standardabweichung einer Zufallsvariablen X als

$$SD[X] := +\sqrt{Var[X]},$$

im obigen Beispiel gilt also $SD[X] = \sigma$.



Verschiebungssatz:

$$E[(X-a)^2] = E[(X-\mu+\mu-a)^2]$$

$$= E[(X-\mu)^2 + (\mu-a)^2 + 2(X-\mu)(\mu-a)]$$

$$= Var[X] + (\mu-a)^2 + 2\underbrace{E[(X-\mu)(\mu-a)]}$$

$$= (\mu-a)\, E[X-\mu]$$

$$= (\mu-a)(E[X]-\mu) = 0$$

Insbesondere gilt für $a=0$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

In der Quantenmechanik definieren wir den Erwartungswert eines selbstadjungierten Operators $\hat{A}$ in einem Zustand ψ als

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(x)}\, \hat{A}\, \psi(x)\, dx^n$$

Zerlege $\psi(x)$ in eine Linearkombination $\psi = \sum_n a_n \phi_n$ mit $\hat{A}\phi_n = \lambda \cdot \phi_n$

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\left(\sum_n a_n \phi_n\right)} \sum_m \lambda_m a_m \phi_m \, dx^n$$

$$= \sum_n |a_n|^2 \lambda_n,$$

wobei wir benutzt haben, dass $\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{m,n}$.

Man kann zeigen, dass ein selbstadjungierter (normal ist ausreichend) Operator $\hat{A}$ unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ $F_{\hat{A}}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \mapsto f_A(x) \cdot \psi(x)$ mit $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Daraus folgt, dass es eine Basis gibt mit

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, |\Psi(x)|^2 \, dx^n$$

Bsp: Impulsoperator und Fouriertransformierte.