9. Klassische Mechanik

Wir definieren die Lagrange-Funktion des Systems als

$$\mathcal{L} = T - V(x^1, \dots, x^n)$$

mit der potentiellen Energie V und der kinetischen Energie

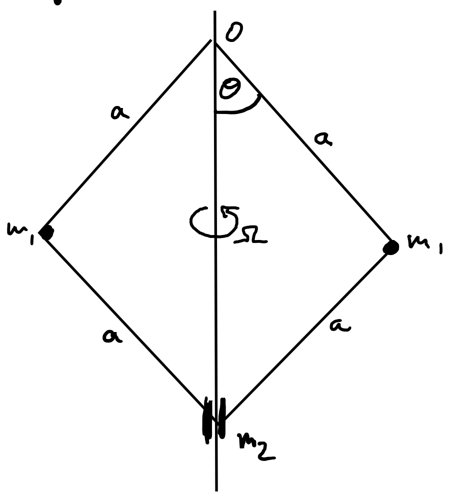
$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}^{i\,2}.$$

Das System wird dann beschrieben durch die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0,$$

wobei $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}$ der „konjugierte Impuls" p_i ist.

Bsp.



Drehwinkel φ mit $\dot{\varphi} = \Omega$. Das Verschiebungselement der Massen m_1 zum Punkt O beträgt

$$dl_1^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

Der Abstand von m_2 zu O ist

$$l_2 = 2a\cos\theta$$

$$\Rightarrow dl_2 = -2a\sin\theta \, d\theta$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = {} & \left.\begin{aligned} & 2 \cdot \frac{m_1}{2}\left(a^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \sin^2\theta \, \Omega^2\right) \\ & + \frac{m_2}{2}\left(4a^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\theta}^2\right) \end{aligned}\right\} T \\ & - \underbrace{\left(-2m_1 g a \cos\theta - 2a\cos\theta \, m_2 g\right)}_{V} \end{aligned}$$

Noethersche Theorem (einfach): Sei φ das Vektorfeld einer kontinuierlichen Symmetrie einer Lagrange-Fkt. $\mathcal{L}$. Dann ist erhalten, also

$$F(x_i, \dot{x}_i, t) := \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \varphi^i$$

$$\frac{d}{dt} F(x, \dot{x}, t) = 0.$$

Bsp: Sei $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{x}^{i2}$.

Impuls: $x_i \mapsto x_i + \delta_i^j \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ist kont. Symm. mit Vektorfeld $\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$-te Komponente.

$$F = m_j \dot{x}^j = p_j$$

Da dies so üblich ist, werden wir von nun an die Koordinaten eines Systems mit „q" bezeichnen (statt mit „x"). Weiterhin gilt für den konjugierten Impuls $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}$.

Wir definieren die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i p_i \dot{q}^i - \mathcal{L},$$

wobei

$$dH = \sum_i dp_i \, \dot{q}^i + \sum_i p_i \, d\dot{q}^i - \sum_i \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}}_{= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = \dot{p}_i} dq^i - \sum_i \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}}_{= p_i} d\dot{q}^i$$

$$= \sum_i dp_i \, \dot{q}^i - \sum_i \dot{p}_i \, dq^i.$$

Hier haben wir angenommen, dass $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, bzw. dass die Energie erhalten ist.

Es folgen die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} .$$

Rückschließend gilt auch wieder

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} .\end{aligned}$$

Falls H nicht explizit von der Zeit abhängt, gilt $\frac{dH}{dt} = 0$.

<u>Poisson-Klammern</u>

Wir betrachten eine Funktion $f(q,p,t)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right)}_{=: \{f, H\}} .\end{aligned}$$

Wir nennen $\{f, H\}$ die Poissonsche Klammer für die Größen H & f. Das bedeutet ebenfalls, dass eine Größe die nicht explizit von der Zeit abhängt ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$) erhalten ist, falls $\{H, f\} = 0$ ist.

Durch Ausrechnen folgt

$$\{p_i, p_j\} = \{q^i, q^j\} = 0$$
$$\{q^j, p_i\} = \delta_i^j .$$

In Serie 4 Aufgabe 3 wurde gezeigt, dass

$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{i\hbar} = \{A, B\}.$$

In der QM ist also zu erwarten, dass folgende Aussagen für einen Operator $\hat{J}$, der nicht explizit von der Zeit abhängt, äquivalent sind:

(i) Die zugehörige Größe ist erhalten.

(ii) $[\hat{H}, \hat{J}] = 0$

(iii) $\hat{H}$ und $\hat{J}$ sind simultan diagonalisierbar.

Degenerierung von Zuständen

Man ist oft daran interessiert, die Zustände eines Systems zu kategorisieren. Meistens passiert das über den jeweiligen Energieeigenwert. Falls nun aber die Multiplizität eines EWs des Hamilton-Operators größer als eins ist, so nennt man dieses Energielevel degeneriert/entartet (dies gilt allgemein für Eigenräume beliebiger Operatoren bzw. Matrizen). Falls es nun eine Erhaltungsgröße L gibt (also $[\hat{L}, \hat{H}] = 0$), so ist jeder Eigenzustand von $\hat{H}$ auch einer von $\hat{L}$. Nun besteht die Chance, dass die degenerierten Zustände unterschiedliche EW unter $\hat{L}$ besitzen.

Dies erlaubt dann die Kategorisierung der Zustände anhand der Eigenwerte von $\hat{H}$ <u>und</u> $\hat{L}$.

Hamilton-Jacobi-Gleichung

Die Wirkung ist definiert als

$$S[q(t)] := \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \, dt .$$

Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen haben wir q gestört zu $q(t) \to q(t) + \delta q(t)$ und erhielten

$$\delta S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \, dt$$

wobei wir $\delta q(t_2) = \delta q(t_1) = 0$ annahmen. Wir lockern nun die erste Bedingung: $\delta q(t_1) = 0$, $\delta q(t_2) =: \delta q$. Die Bewegungsgleichung soll weiterhin erfüllt sein. Es folgt

$$\delta S = p \, \delta q \quad \to \quad \frac{\partial S}{\partial q} = p$$

Also

$$\mathcal{L} = \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}^i$$

und demnach

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^1, \dots, q^N, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q^N}, t\right) = 0$$

Dies ist die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung die die Wirkung S erfüllen muss.

Falls H unabhängig von t ist, so folgt

$$S(q^1,\dots,q^N,t) = S_0(q^1,\dots,q^N) - \mathcal{E}t, \quad \mathcal{E} \in \mathbb{R}$$

und damit

$$\mathcal{E} = H\left(q^1,\dots,q^N, \frac{\partial S}{\partial q^1},\dots,\frac{\partial S}{\partial q^N}\right).$$

<u>Zusammenhang zur Schrödingergleichung</u>

Wir betrachten den Zustand $\psi(x,t) = \psi_0 e^{iS/\hbar}$.

Die S.-Gl. lautet

$$i\hbar\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}\right)e^{iS/\hbar} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 e^{iS/\hbar} + \frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}e^{iS/\hbar}\right) + V(x)e^{iS/\hbar}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x) = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \xrightarrow[\hbar\to 0]{} 0$$

Im klassischen Grenzfall erhalten wir also wieder die H.-J.-Gl.

Kanonische Transformationen

nicht behandelt in Vorlesung

Wir nehmen an, wir machen einen Variablenwechsel

$$Q^i = Q^i(q,p,t) \qquad P_i = P_i(q,p,t).$$

Wie verändert sich der Hamiltonian $H \to H'$, sodass

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \quad \& \quad \dot{P}_i = \frac{\partial H'}{\partial Q^i} \quad ?$$

Es muss also zusätzlich zu

$$\delta \int \left(\sum_i p_i \, dq - H dt \right) = 0$$

auch

$$\delta \int \left(\sum_i P_i \, dQ^i - H' dt \right) = 0$$

gelten. Das bedeutet jedoch, dass die Differenz der Integranden ein totales Differential dF sein muss. Es folgt

$$dF = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i \, dQ^i + (H' - H) dt$$

und

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i} \,, \quad P_i = - \frac{\partial F}{\partial Q^i} \quad , \; H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Wir suchen nach sog. „vollständigen Integralen" der Gleichung. Dies sind Lösungen

$$S = f(t, q^1, \dots, q^N, \alpha^1, \dots, \alpha^s) + A$$

mit $s = N$ (Es gibt also für jede unabhängige Veränderliche (t, q^i) eine unabh. Konstante (A, α^i)).

Wir führen eine kanonische Transformation mit Erzeugender Fkt. f durch.

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i} \quad , \quad \beta_i := \frac{\partial f}{\partial \alpha^i} \quad , \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} .$$

Aber, da f die H.-J.-Gl. erfüllt, folgt

$$H' = 0. \quad H' = 0$$

und zusätzlich

$$\dot{\alpha}^i = \dot{\beta}^i = 0$$

Wir können dann q als Funktion der Erhaltungsgrößen α^i und β_i schreiben.

Separation der Variablen

Falls eine Variable zusammen mit ihrem konjugierten Impuls, o.B.d.A. q^1 & $\frac{\partial S}{\partial q^1}$, nur in einer von sonstigen Variablen/Impulsen unabhängigen Form $\varphi\left(q^1, \frac{\partial S}{\partial q^1}\right)$ vorkommen, vereinfacht sich die H.-J.-Gl.* $\Phi\left(q, t, \frac{\partial S}{\partial q}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q^1, \frac{\partial S}{\partial q^1}\right)\right) = 0$.

Wir machen den Ansatz $S = S'(q,t) + S_1(q^1)$. Einsetzen bewirkt

$$\Phi\left(q, t, \frac{\partial S'}{\partial q}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q^1, \frac{\partial S}{\partial q^1}\right)\right) = 0$$

Für feste q, t muss dies für alle q^1 gelten. Daraus folgt aber, dass

$$\varphi\left(q^1, \frac{\partial S}{\partial q^1}\right) =: \alpha_1 = \text{const.}$$

$$\Phi\left(q, t, \frac{\partial S'}{\partial q}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha\right) = 0 .$$

* q steht für alle Variablen außer q^1.

Die H.-J.-Gl. zerfällt also in eine gewöhnliche DGl und eine H.-J.-Gl. mit $N-1$ Variablen.

<u>Bsp</u>: Freies Teilchen

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}$$

H.-J.-Gl.: $\mathcal{E} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \dots$

$\Rightarrow$ Separation der Variablen

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 := \sqrt{\frac{h_x}{2m}} = \text{const.}$$

und äquivalent für y, z.

$$S = h_x x + h_y y + h_z z + \text{const}$$

mit der Randbedingung

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2m} \left(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2 \right)$$