1 Komplexe Zahlen

$\mathbb{N}$: $3-6x=0$ ✗

↳ $\mathbb{Q}$: $3-6x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ ✓

$x^2-2=0$ ✗

↳ $\mathbb{R}$: $x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ ✓

$x^2+1=0$ ✗

Führe die Größe $i := „\sqrt{-1}“$ ein. Dann:

$$x^2+1=0 \Rightarrow x\left(=\pm\sqrt{-1}\right)=\pm i$$

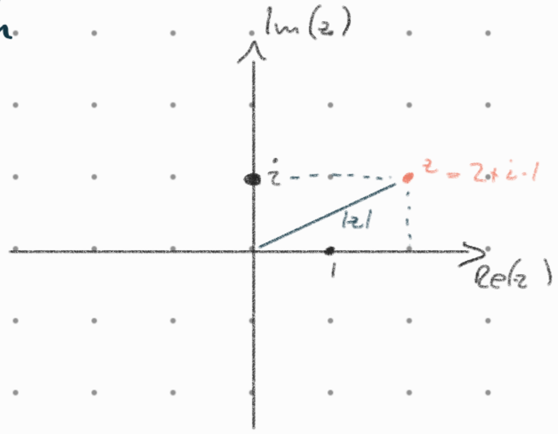
Vorsicht mit $\sqrt{-1}$: $-1=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{-1\cdot(-1)}=\sqrt{1}=1$ ✗

Eine komplexe Zahl ist gegeben durch

$$z = a + bi$$

Realteil $Re(z)\in\mathbb{R}$

Imaginärteil $Im(z)\in\mathbb{R}$



Betrag wie im $\mathbb{R}^2$: $|z|=\sqrt{Re(z)^2+Im(z)^2}$

Rechenregeln: $z = a_1 + b_1 i$ $\quad w = a_2 + b_2 i$ $\quad , a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

- $z + w = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

- $z \cdot w = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)i$$

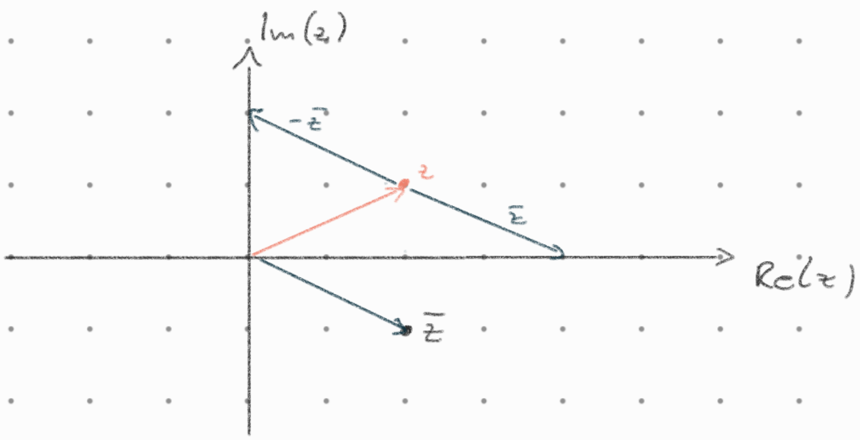
komplexe Konjugation: $z = a + bi \mapsto \bar{z} = a - bi$

$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

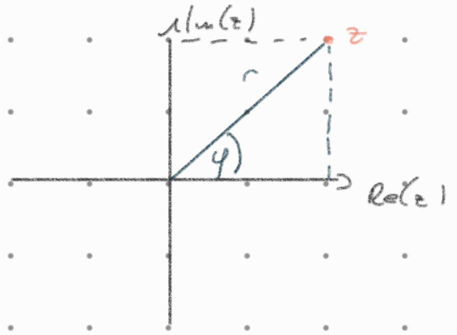
$\hookrightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

- $\frac{z}{w} = z \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2}$

- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ $\qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$



In Polarkoordinaten:



$$\mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi$$
$$\mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi$$

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$
$$\cos\varphi = \mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

$\varphi = \pi$:
$e^{i\pi} + 1 = 0$

Quantenmechanik: $|\cdot|^2$ = Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + \dots$$

$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen

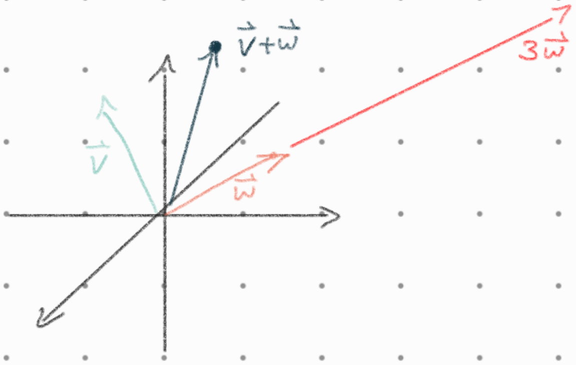
$\Longleftrightarrow$ jedes Polynom $\mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$ zerfällt in Linearfaktoren

"Polynome vom Grad 1"

2. Lineare Algebra

2.1. Vektorräume

Informell:



(1) Vektoren addieren
(2) Vektoren skalieren

Formell: Sei V eine Menge (z.B. $\mathbb{R}^3$), $\mathbb{K}$ ein Körper.
$u, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Addition:

$(u+v)+w = u+(v+w)$ (assoziativ)

$0_V + v = v$ (Nullelement)

$(-v)+v = 0_V$ (Inverses Element)

$u+v = v+u$ (kommutativ)

Skalarmultiplikation:

$\alpha \cdot (u+v) = \alpha u + \alpha v$

$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

$(\alpha \cdot \beta)u = \alpha \cdot (\beta u)$

$1 \cdot u = u$

Sei $v_1, \dots, v_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, dann heißt

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

eine Linearkombination.

Die lineare Hülle von $\{v_1, \ldots, v_n\}$ besteht aus allen solchen Elementen für beliebige α_is. Man schreibt

$$\operatorname{span}(\{v_1, \ldots, v_n\}) \quad \text{oder} \quad \langle v_1, \ldots, v_n \rangle .$$

Eine Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist linear abhängig, falls es α_i gibt mit

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \quad ,$$

wobei nicht alle $\alpha_i = 0$ sind.

Eine Basis von V ist eine Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$, welche linear unabhängig ist und deren lineare Hülle V ist.

Die Dimension des Raumes ist gleich der Kardinalität der Basen.

<u>Bsp.</u> $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

- ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig? X
- Was ist $\operatorname{span}(\mathcal{B})$?
  $\Rightarrow$ die x-Achse
- Was wäre eine Basis für V?
- Was ist die Dimension von V?

Ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$$

mit

(1) $\langle x,x \rangle \geq 0$

(2) $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ } positiv definit

(3) $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$ hermitesch

(4) linear im zweiten Argument:

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle$$

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$$

Bsp. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Bsp. $V = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\langle z, w \rangle = \bar{z} \cdot w$$

$\Rightarrow$ beachte $\langle z,z \rangle = \bar{z} \cdot z = |z|^2 \geq 0$

Zwei Vektoren $u, v \in V$ sind orthogonal, falls

$$\langle u,v \rangle = 0$$

und orthonormal, falls zusätzlich $\langle u,u \rangle = \langle v,v \rangle = 1$

Man nennt

$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v \rangle}$$

die induzierte Norm (oder auch einfach Norm).

Entsprechend heißt eine Basis orthonormale/orthogonale Basis, wenn ihre Elemente es paarweise sind.

Dualraum (von Räumen mit Skalarprodukt)

Der Dualraum V^* von V besteht aus allen linearen Abbildungen von $V \to \mathbb{K}$.

Bsp. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $f \in V^*$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

V^* besteht also aus allen Elementen der Form

$$w^*: \begin{aligned} V &\to \mathbb{K} \\ v &\mapsto \langle w, v \rangle \end{aligned} \qquad \text{für } v \in V.$$

V und V^* haben beide die selbe Dimension (falls diese endlich ist) und können als linker und rechter Handschuh eines Paars interpretiert werden.

Weiter, $(V^*)^* \cong V$. kanonisch isomorph

Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Eine Basis $\mathcal{B}^* = \{w_1^*, \ldots, w_n^*\}$ von V^* heißt die duale Basis von $\mathcal{B}$, falls

$$\langle w_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \qquad \forall i,j.$$

Bsp. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Wir müssen also zwei Vektoren v_1, v_2 in $\mathbb{R}^2$ finden, mit

$$\langle v_1, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 1 \qquad \langle v_1, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\Leftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}$

$$\langle v_2, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \qquad \langle v_2, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 1$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} 2 + 1 \cdot * = 0$ $\qquad$ $\Leftrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ * \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_2 = -\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \mathcal{B}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}^* \right\}$$

Bsp. Was passiert für $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ orthonormal?

A: $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$

2.2. Lineare Abbildungen

Jede lineare Abbildung $f: V \to W$, V, W VR, ist eindeutig durch das Bild einer Basis von V bestimmt.

Seien $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ Basen, so existieren $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

Die Darstellungsmatrix ist gegeben durch

$$[f]_B^A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

sodass

k-ter Eintrag

$$[f]_B^A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} w_i$$

Eigenwerte

Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\operatorname{char}_X(f) = \det(f - X\mathbb{1})$$

Beispiel: $\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left|\begin{pmatrix} -X & 1 \\ 2 & 1-X \end{pmatrix}\right|$

$$= -X(1-X) - 2 = X^2 - X - 2$$

$$\Rightarrow X_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \{2, -1\}$$

Eigenwerte sind $2, -1$

Eigenräume

Sei λ ein Eigenwert der Matrix A.
Dann ist der Eigenraum zum EW λ gegeben durch

$$\mathrm{Eig}_\lambda(A) = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$$

$\mathrm{Eig}_\lambda(A) \neq \{0\}$, da $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$.
Alle Elemente $v \neq 0$ in $\mathrm{Eig}_\lambda(A)$ heißen Eigenvektoren zum EW λ und erfüllen

$$Av = \lambda v.$$

Bsp. Betrachte die stetigen 2π-periodischen reellen Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) v(x) \, dx$$

Dies ist ein Vektorraum, da falls f, g stetig & 2π-periodisch

$$\alpha \cdot f(x) + g(x)$$

es ebenfalls ist.

Eine Basis ist gegeben durch

$$\{\sin(kx) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\cos(kx) \mid k \in \mathbb{N}_0\},$$

wobei

$$\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)dx$$
$$= 0$$
$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{2\pi}{2}\,\delta_{mn} = \delta_{mn}$$
$$\langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right)dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{2\pi}{2}\,\delta_{mn} = \delta_{mn}$$

Also ist die Basis eine <u>orthonormale</u> Basis bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Der Vektorraum ist ∞-dimensional.

Für komplexwertige Funktionen $[0, 2\pi) \to \mathbb{C}$, ist eine orthogonale Basis gegeben durch

$$\{ e^{imx} \mid m \in \mathbb{Z} \}$$

mit

$$\langle e^{imx}, e^{imx} \rangle = 2$$

f

Simultane Diagonalisierbarkeit

Seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ diagonalisierbar. Es gilt äquivalent

(a) $[A, B] = AB - BA = 0$

(b) $\exists$ eine Basis für $\mathbb{K}^n$ aus simultanen EV.

Beweis "$\Leftarrow$" A, B können also diagonalisiert werden als

$$A = S D S^{-1}$$
$$B = S \tilde{D} S^{-1} \quad , S = (v_1 | \dots | v_n)$$

Es folgt

$$AB - BA = S D \tilde{D} S^{-1} - S \tilde{D} D S^{-1}$$
$$= S \underbrace{(D\tilde{D} - \tilde{D}D)}_{=0} S^{-1}$$

("$\Rightarrow$" Übung.)

Hermitesche Matrizen

... sind definiert durch die Eigenschaft

$$A = \bar{A}^T =: A^H$$

wobei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

[Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Für ein allgemeines Skalarprodukt nennen wir die Matrix A^* mit $\langle Av, w\rangle = \langle v, A^* w\rangle$ die Adjungierte von A und A ist selbstadjungiert falls $A = A^*$. Falls $\langle v,w\rangle = v^H w$ das Standardskalarprodukt, gilt $A^* = A^H$.]

Betrachte das Standardskalarprodukt $\langle x,y\rangle_0 = x^H y$ auf $\mathbb{C}^n$

$$\langle Ax, y\rangle_0 = (Ax)^H y = x^H A^H y = \langle x, A^H y\rangle_0$$

Falls A hermitesch, so folgt $\langle Ax, y\rangle_0 = \langle x, Ay\rangle_0$.
Sei v ein EV zum EW λ:

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, v\rangle_0 &= \langle v, \lambda v\rangle_0 = \langle v, Av\rangle_0 \\ &= \langle Av, v\rangle_0 = \bar{\lambda} \underbrace{\langle v, v\rangle_0}_{\neq 0} \end{aligned}$$

Somit sind die Eigenwerte von A reell.

Jede hermitesche Matrix ist diagonalisierbar.

<u>Beweis:</u> Sei λ ein EW von A mit geometrischer Vielfachheit $m = \dim \mathrm{Eig}_\lambda$. Wähle eine orthonormale Basis $\{x_1, \dots, x_m\}$ auf Eig_λ und ergänze sie zu einer Orthonormalbasis $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ auf $V = \mathbb{C}^n$.
Mit $S := (x_1 | \dots | x_n)$ folgt

$$C := S^{-1} A S = S^H A S = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I & 0 \\ \hline 0 & X \end{array}\right),$$

denn für $\min(j,k) \leq m$ folgt

$$c_{jk} = \begin{cases} \langle x_j, A x_k\rangle_0 & \text{falls } k \leq j \\ \langle x_j, A x_k\rangle_0 = \langle A x_j, x_k\rangle_0, & \text{falls } j \leq k \end{cases}$$

$$= \lambda \delta_{jk}.$$

Es folgt für das char. Polynom

$$\mathrm{char}_X(C) = (\lambda - X)^m \cdot \ldots$$

$$\overset{\shortparallel}{\mathrm{char}_X}(S^H A S) = \det(S^H A S - X\mathbb{1})$$
$$= \det(S^H (A - X\mathbb{1}) S)$$
$$= \mathrm{char}_X(A)$$

Also ist die algebraische Multiplizität von A gleich der geometrischen Mult. $\quad \square$

Falls v_1, v_2 EV zu EW λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so folgt

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle_0 \overset{\lambda_1 \in \mathbb{R}}{=} \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle_0 = \langle A v_1, v_2 \rangle_0 = \langle v_1, A v_2 \rangle_0$$
$$= \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle_0 ,$$

$$\Rightarrow \quad \langle v_1, v_2 \rangle_0 = 0$$

Eigenräume zu verschiedenen EW sind orthogonal.
Daher gibt es zu jeder hermiteschen Matrix A eine Orthonormalbasis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ mit

$$A = S D S^H \qquad , \; S = (x_1 | \cdots | x_n),$$
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Diag}_n(\mathbb{R})$$