10.4 Darstellungen von Lie-Algebren (kopiert)

Während die Darstellung einer Gruppe kompatibel mit der Gruppenverknüpfung sein muss, fordert man für jene der Lie-Algebren die Kompatibilität mit der Vektorraumstruktur.
Eine Darstellung einer Lie-Algebra ist also eine lineare Abbildung

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$$

mit

$$\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] .$$

Beachte die Zielmenge $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Lie}(GL_n(V))$, da

$$\det(e^{tX}) = \exp(\mathrm{tr}(tX)) \neq 0$$

für alle $X \in \mathrm{End}(V)$ und $t \in \mathbb{R}$. Betrachte eine Darstellung σ einer Lie Gruppe G und definiere für $X \in \mathrm{Lie}(G)$

$$\sigma_*(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sigma(\exp(tX)) \in \mathrm{Lie}(GL_n(\mathbb{K})) = \mathrm{End}(V)$$

Man kann zeigen, dass σ_* eine Lie-Algebra Darstellung ist, welche rückwirkend σ (eingeschränkt auf die Einskomponente von G) definiert.

10.6. Irreduzible endlich-dimensionale Darstellungen von $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$

Wir betrachten eine irreduzible Darstellung

$$\rho : \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^n).$$

Da jede endl.-dim Abbildung mindestens einen EW über $\mathbb{C}$ besitzt, existiert ein Zustand $|\psi\rangle$ mit

$$\rho(J_z)|\psi\rangle = m|\psi\rangle.$$

Nun gilt,

$$\rho(J_z)\rho(J_\pm)|\psi\rangle = \underbrace{[\rho(J_z),\rho(J_\pm)]}_{=\rho([J_z,J_\pm])}|\psi\rangle + \rho(J_\pm)\rho(J_z)|\psi\rangle$$

$$= \pm\rho(J_\pm)|\psi\rangle + m\,\rho(J_\pm)|\psi\rangle$$

$$= (m\pm 1)\,\rho(J_\pm)|\psi\rangle.$$

Dies bedeutet, dass $\rho(J_\pm)|\psi\rangle$ entweder ein Eigenvektor von $\rho(J_z)$ mit EW $m\pm1$ ist oder, dass $\rho(J_\pm)|\psi\rangle = 0$.
Die Menge der EW lautet also für $m_-, m_+ \in \mathbb{Z}$

$$\{m_-, m_-+1, \dots, m_+-1, m_+\}.$$

Wir nehmen nun den Vektor $|\psi_{m_+}\rangle$ mit $\rho(J_+)|\psi_{m_+}\rangle = 0$, genannt Vektor des „höchsten Gewichts". Die Behauptung lautet, dass $\mathbb{C}^N$ aufgespannt wird durch die Vektoren

$$|\psi_k\rangle := \rho(J_-)^k|\psi_{m_+}\rangle \quad , \; k = 0, \dots, N-1 = m_+ - m_-.$$

Da ρ per Annahme irreduzibel ist, müssen die Vektoren der Form $\rho(J_\pm)^k|\psi\rangle$ für passende (endlich viele) k den Raum aufspannen. Wir müssen also lediglich zeigen, dass durch Anwenden von $\rho(J_\ell)$ auf $|\psi_k\rangle$ keine anderen Zustände generiert werden.

- $\rho(J_z)$ bildet alle Vektoren auf sich selber ab.
- $\rho(J_-)$ bildet $|\psi_k\rangle$ auf $|\psi_{k+1}\rangle$

  mit $\rho(J_+)|\psi_0\rangle = 0$ & $\rho(J_-)|\psi_{N-1}\rangle = 0$

Es verbleibt die Wirkung von J_+

$$
\begin{aligned}
\rho(J_+)|\psi_k\rangle &= \rho(J_+)\rho(J_-)|\psi_{k-1}\rangle \\
&= \rho(J_-)\underbrace{\rho(J_+)|\psi_{k-1}\rangle} + \underbrace{[\rho(J_+),\rho(J_-)]|\psi_{k-1}\rangle}_{=2(m_+-k+1)|\psi_{k-1}\rangle} \\
&= \rho(J_-)\rho(J_+)|\psi_{k-2}\rangle + 2(m_+-k+2)|\psi_{k-2}\rangle
\end{aligned}
$$

wird wieder zu $|\psi_{k-1}\rangle$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho(J_-)^k\underbrace{\rho(J_+)|\psi_0\rangle}_{=0} + \sum_{i=1}^{k} 2(m_+-k+i)|\psi_{k-1}\rangle \\
&= \Big(2m_+k - 2k^2 + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{k} i}_{=\frac{k(k+1)}{2}}\Big)|\psi_{k-1}\rangle \\
&= k(2m_+ - k + 1)\,|\psi_{k-1}\rangle
\end{aligned}
$$

Die Aussage folgt. Da außerdem $|\psi_N\rangle = 0$ ist, kann die obige Rechnung nur gelten wenn

$$2m_\mp - N + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_\pm = \pm \frac{N-1}{2}$$

Wir haben also die sogenannten Spin-Darstellungen gefunden, welche charakterisiert sind durch eine nicht-negative halbganze Zahl $j = \frac{1}{2}(N-1)$

$$\rho_{\mathbb{C},j} : \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2j+1}).$$

Der Raum $\mathbb{C}^{2j+1}$ wird aufgespannt durch

$$|m\rangle \qquad , m \in \{-j, -j+1, \ldots, j-1, j\}$$

wobei:

$$\rho(J_z)\,|m\rangle = m\,|m\rangle$$

$$\rho(J_\pm)\,|m\rangle = c_m^\pm\,|m \pm 1\rangle.$$